

# 5

## ÁUDIO PARTE 5 DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Fabio Montoro  
Revisado em 12-3-2015

### 5.1 Revisão

#### 5.1.1 Equações de Euler

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \cdot \text{sen}(\theta) \quad [5.1]$$

$$e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j \cdot \text{sen}(\theta) \quad [5.2]$$

$$\therefore \cos(\theta) = \frac{1}{2} \{ e^{+j\theta} + e^{-j\theta} \} \quad [5.3]$$

$$\therefore \text{sen}(\theta) = -\frac{j}{2} \{ e^{+j\theta} - e^{-j\theta} \} \quad [5.4]$$

#### 5.1.2 Sinal senoidal representado no domínio do tempo

$$v(t) = V \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad [5.5]$$

$$v(t) = \frac{1}{2} V \{ e^{j(\omega_0 t + \phi)} + e^{-j(\omega_0 t + \phi)} \} \quad [5.6]$$

#### 5.1.3 Ortogonalidade de vetores

A figura 5.1 mostra que, dados dois vetores **X** e **Y**, a projeção do vetor **Y** sobre **X** é o vetor **Y<sub>x</sub>**, na direção de **X**. Um vetor é definido pela sua amplitude e direção. Os dois vetores da figura possuem direções distintas e formam um determinado ângulo entre si.

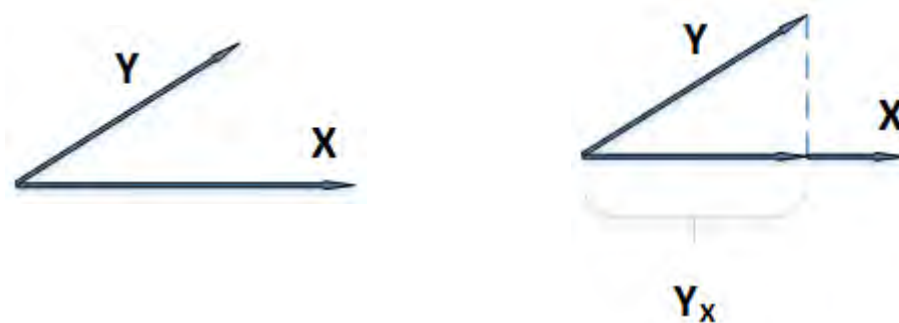


Fig. 5.1: Projeção de um vetor sobre outro

Define-se "produto escalar de dois vetores" como sendo o produto de suas amplitudes e do cosseno do ângulo entre eles:

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = |\vec{X}| \cdot |\vec{Y}| \cdot \cos \alpha \quad [5.7]$$

Dois vetores são ortogonais quando a projeção de um sobre o outro é nula, ou seja, quando o produto escalar deles é nulo. Dizemos que não há componente de um sobre o outro, ou ainda, que os dois vetores são independentes. A figura 5.2 mostra dois vetores ortogonais **X** e **Y** ( $\cos \alpha = 0$ ) e que qualquer vetor no plano desses dois, pode ser representado pela soma de suas componentes em **X** e **Y**.

Diz-se que este é um espaço vetorial de duas dimensões.

A figura mostra, ainda, que o vetor **A** pode ser representado pela soma vetorial de suas componentes ortogonais **A<sub>x</sub>** e **A<sub>y</sub>**, ou seja:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \quad [5.8]$$

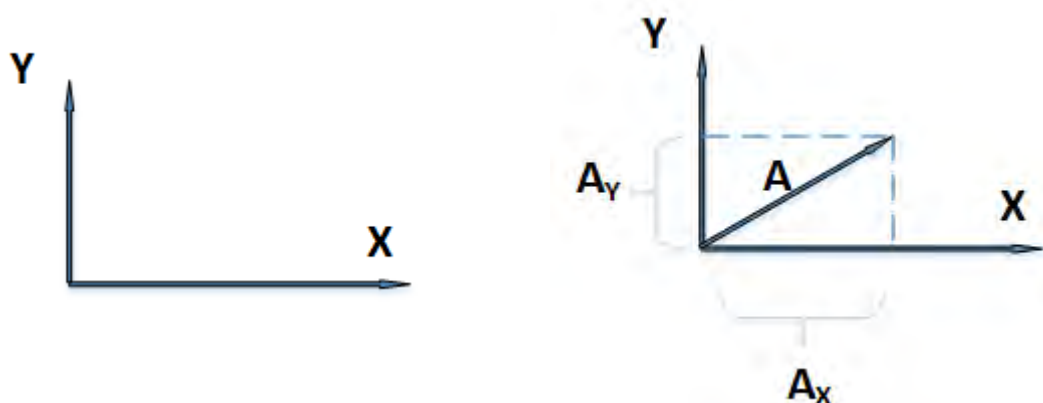


Fig. 5.2: Representação de um vetor pela soma de suas componentes ortogonais

#### 5.1.4 Ortogonalidade de sinais

Dois sinais são ortogonais em um determinado de tempo se:

$$\int_{t_1}^{t_2} v_1(t) \cdot v_2(t) \cdot dt = 0 \quad [5.9]$$

Considerando "n" e "m" números inteiros, pode-se demonstrar que, em qualquer intervalo igual ao período  $1/f_0$ , os seguintes sinais são ortogonais:

$$\cos(n\omega_0 t) \perp \cos(m\omega_0 t) \quad [5.10]$$

$$\text{sen}(n\omega_0 t) \perp \text{sen}(m\omega_0 t) \quad [5.11]$$

$$\cos(n\omega_0 t) \perp \text{sen}(m\omega_0 t) \quad [5.12]$$

Da mesma forma que qualquer vetor pode ser expresso pela soma de suas componentes (ortogonais) em um espaço vetorial, prova-se que os sinais também podem ser representados por suas componentes em um conjunto de funções ortogonais.

Qualquer sinal elétrico, representado no tempo, pode, portanto, ser representado por um conjunto de senos e cossenos, já que estes são ortogonais.

Esta é a base da transformada de Fourier.

Os sinais senoidais são as componentes do sinal representado e o conjunto é chamado de "espectro".

## 5.2 Sinal periódico $\longleftrightarrow$ espectro discreto

### 5.2.1 Série trigonométrica de Fourier

A equação 5.13 mostra que uma função periódica  $v(t)$  pode ser representado por uma soma de sinais senoidais<sup>1</sup> (série trigonométrica de Fourier):



Fourier

$$v(t) = v_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \{a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \text{sen}(n\omega_0 t)\} \quad [5.13]$$

O coeficiente " $v_0$ " corresponde ao valor médio do sinal:

$$v_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} v(t) \cdot dt \quad [5.14]$$

Os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são dados por:

---

<sup>1</sup>  $\cos(\theta) = \text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} v(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) \cdot dt \quad [5.15]$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} v(t) \cdot \text{sen}(n\omega_0 t) \cdot dt \quad [5.16]$$

### 5.2.2 Experiência

- Micro + Power Point
- Slides

- 1 Será apresentada em aula a representação de uma onda dente de serra por suas componentes em frequência

### 5.2.3 Série exponencial de Fourier

Outra forma de escrever a série de Fourier é utilizando as funções exponenciais:

$$v(t) = v_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad [5.17]$$

$$V_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} v(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt \quad [5.18]$$

## 5.3 Sinal qualquer $\iff$ espectro contínuo

### 5.3.1 Transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\{v(t)\} = V(\omega) \quad [5.19]$$

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt \quad [5.20]$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad [5.21]$$

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n e^{jn\omega} \right\} v(t) e^{-j\omega t} dt \quad [5.22]$$

$$V(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt \quad [5.23]$$

### 5.3.2 Algumas transformadas de Fourier

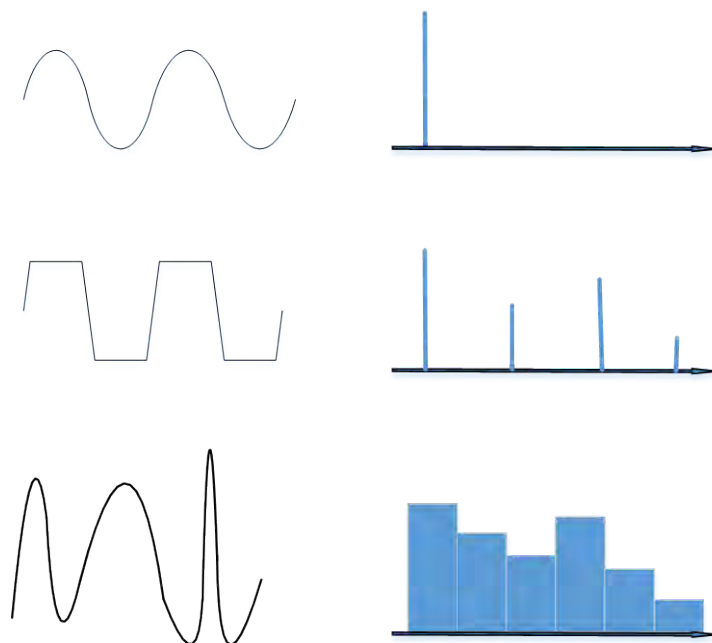
$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi \cdot \delta(\omega) \quad [5.24]$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 \quad [5.25]$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \quad [5.26]$$

Domínio do  
tempo

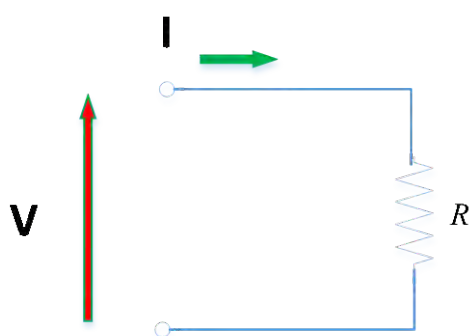
Domínio da  
frequência



**Fig. 5.3: Tempo x Frequência**

## 5.4 Elementos de circuitos: resistor, capacitor, inductor

### 5.4.1 Resistor



$$I = \frac{V}{R}$$

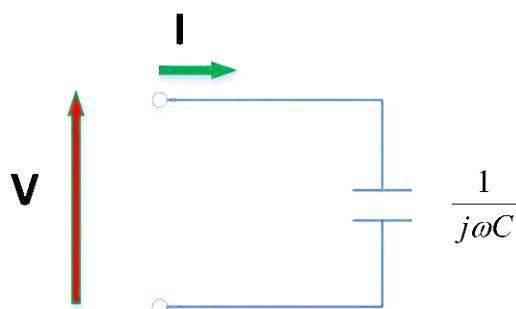
$$\left[ A = \frac{V}{\Omega} \right]$$

Ohm



Fig. 5.4a: Resistor

### 5.4.2 Capacitor



$$I = \frac{V}{1/j\omega C}$$

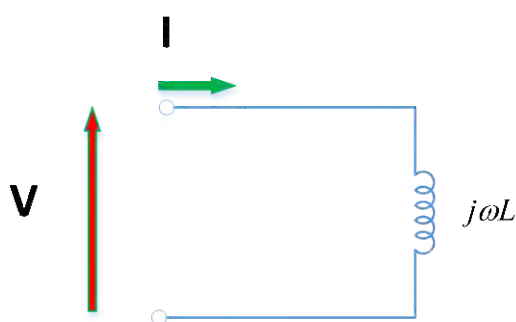
$$\left[ A = F \cdot \frac{V}{t} \right]$$

Faraday



Fig. 5.4b: Capacitor

### 5.4.3 Inductor



$$I = \frac{V}{j\omega L}$$

$$\left[ A = \frac{1}{H} \cdot V \cdot t \right]$$

Henry



Fig. 5.4c: Inductor

Usando a representação simplificada oriunda da transformação de Laplace e desconsiderando energias armazenada em  $t=0$ , substituímos o termo " $j\omega$ " por " $s$ ". Então, os componentes de circuito são representados como:



Laplace

## Frequência

|             |                |        |
|-------------|----------------|--------|
| Resistores  | $R$            | [5.27] |
| Indutores   | $sL$           | [5.28] |
| Capacitores | $\frac{1}{sC}$ | [5.29] |

A representação de Laplace para os componentes facilita muito a análise de circuitos, uma vez que pode-se tratar os problemas algebricamente (no domínio da frequência) ao invés de tratá-los com equações diferenciais (no domínio do tempo).

## 5.5 Impedância

A impedância de um circuito é sua resistência, que varia em função da frequência do sinal senoidal de entrada.

A análise de circuitos com elementos RLC pode ser feita aplicando as leis de Kirchhoff, utilizando as respectivas transformadas de Laplace.

Há dois métodos para solucionar circuitos utilizando a transformada de Laplace: utilizando equações diferenciais e transformando as impedâncias. Este último é mais conveniente ao propósito deste curso.

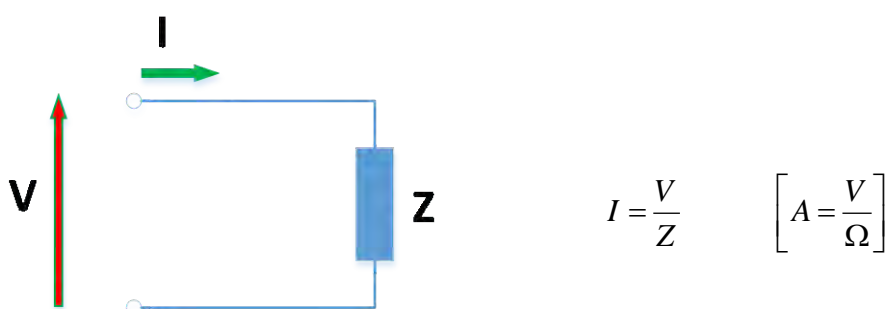


Fig. 5.5: Impedância



## 5.6 Percepção do ouvido humano

O engenheiro Harvey Fletcher, considerado por alguns como o inventor do áudio multicanal, em 1933 traçou (com Wilden Munson) curvas em que o ouvido humano tinha a mesma percepção da intensidade do som ao longo de faixa de frequência audível. D. W. Robinson e R. S. Dadson aprimoraram a curva, que foi incorporada na norma ISO-226. A figura 5.6 mostra a curva segundo a revisão de 2003 da norma ISO. Atualmente é conhecida com “curva Robinson-Dadson”.



H  
Harvey Fletcher

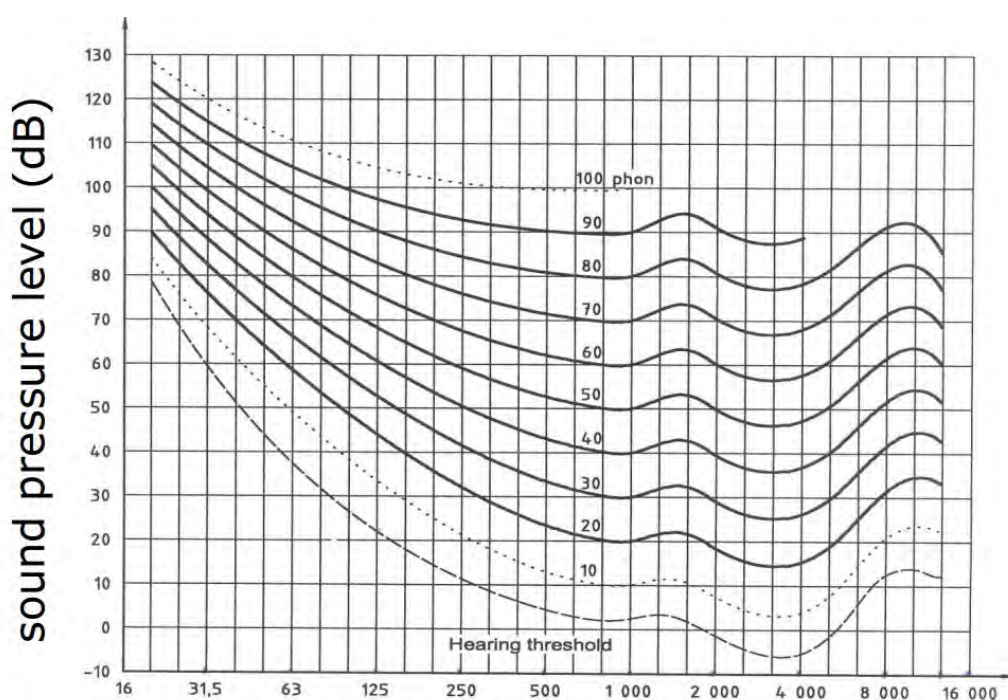


Fig. 5.6: Curva Robinson-Dadson

Cada uma das curvas da figura 5.6 indica que o ouvido humano percebe o som com a mesma intensidade. Por exemplo, um som puro com pressão sonora de 75 dB SPL e frequência de 31,5 Hz, parece, ao ouvido humano, ter a mesma intensidade que um som com 20 dB SPL e frequência de 1000 Hz.

Cada curva define uma intensidade “aparente” denominada “phon”.

A sensibilidade do ouvido humano à mudanças na intensidade do som também varia com a frequência.

Para as frequências médias, mais ao centro da faixa audível, o ouvido somente consegue discernir mudanças quando chegam a 2 dB. Para valores altos de pressão, o ouvido consegue detectar variações de até 0,25 dB mas para baixas pressões o ouvido somente detecta diferenças por volta de 3 dB. Para baixa pressão e baixa frequência, em torno de 40 Hz, o

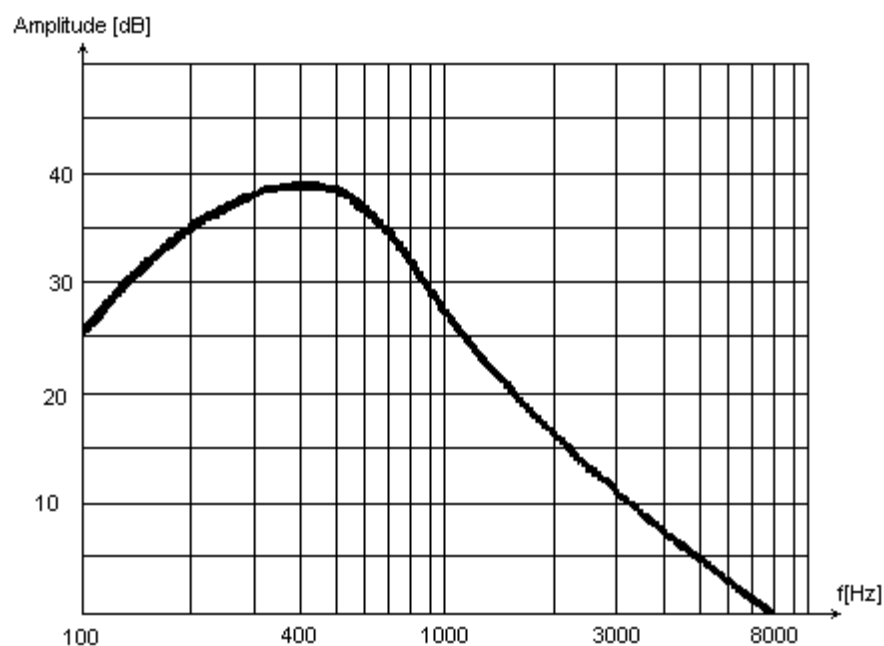
ouvido humano tem baixa sensibilidade a mudanças, à vezes precisando de quase 10 dB para notá-las.

## 5.7 A voz

O sinal da voz humana possui uma densidade espectral que varia constantemente durante o tempo em que a pessoa fala. Entretanto, a longo termo, a densidade tem a aparência da figura 5.7.

As componentes de frequência se situam principalmente entre 100 e 8000 Hz havendo uma concentração maior de energia em torno de 400 Hz.

Estudos mostram que a faixa entre 700 e 2800 Hz (duas oitavas) é a mais importante para a inteligibilidade.



**Fig. 5.7: Densidade espectral do sinal de voz**

Após todos esses estudos e constatações, definiu-se que a faixa entre 300 a 3400 Hz seria suficiente para transportar o sinal de voz com uma inteligibilidade adequada, que deveria ser preservada de ponta a ponta no sistema telefônico, estabelecendo-se assim um padrão de qualidade.

Faixa de voz = 300 a 3400 Hz

Mesmo as codificações de voz no formato digital, com aplicação em telefonia, seguem essa linha: buscam obter o máximo de compressão, porém preservando o espectro original do sinal entre 300 e 3400 Hz.

## 5.8 A música



A escala musical tal qual existe em um piano atual, surgiu no início do século XVII e teve J. S. Bach como seu adepto fervoroso. Bach inclusive compôs uma coleção de prelúdios e fugas para teclado, intitulada "Cravo Bem Temperado", com o objetivo de demonstrar a versatilidade da então nova escala, que permitia transpor o tom de uma passagem musical, em degraus sucessivos, mantendo uma relação tal entre as notas que parecia ao ouvido que o conjunto de notas mantinha a mesma distância entre si, causando um resultado harmonioso.

De fato, o que se fez de ouvido na época, é uma relação logarítmica perfeita.

A escala musical possui 12 notas igualmente espaçadas na escala logarítmica de base 2:

$$f(k+1) = f(k) \cdot 2^{\frac{1}{12}}$$

$f(k)$  = frequência fundamental de uma nota  
 $f(k+1)$  = frequência fundamental da próxima nota [5.30]

O teclado do piano possui 88 teclas, divididas em um pouco mais de sete oitavas ( $88 = 7 \times 12 + 4$ ), sendo a primeira um Lá de 27,5 Hz ( $A_0$ ) e a última um Dó de 4196 Hz ( $C_8$ ).

A equação 5.30, que define a formação das notas musicais, corresponde a uma relação logarítmica entre a frequência fundamental e a próxima nota. Representando as notas musicais em função da frequência, vemos claramente que a relação é logarítmica

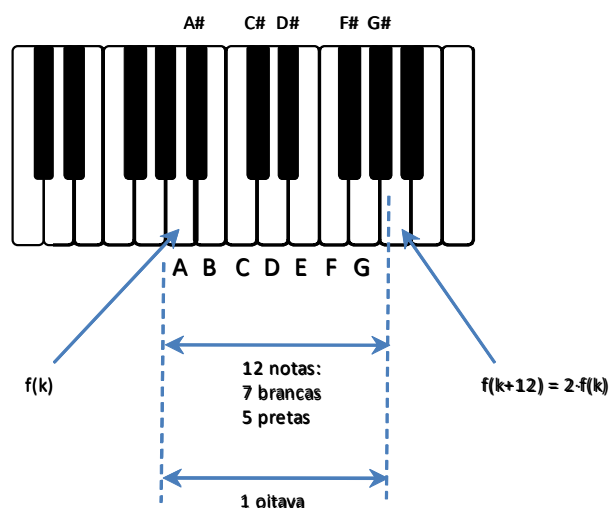


Fig. 5.8: Teclado do piano

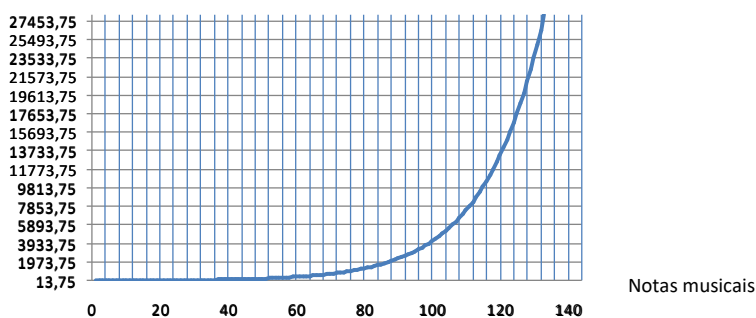
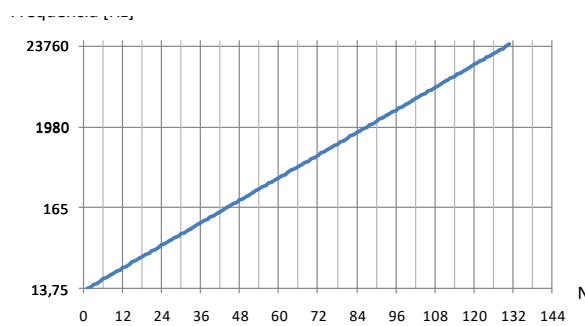


Fig. 5.9: Escala de notas musicais

Passando o eixo vertical da figura 5.9 para a escala logarítmica, obtemos a figura 5.10.



**Fig. 5.10: Escala de notas musicais**

### 5.8.1 Experiência

- iPhone
- Aplicativo piano

- 1 Tocar as notas do teclado do piano
- 2 Observar a extensão das frequências
- 3 Qual a nota mais baixa que se ouve?
- 4 e a mais alta?

## 5.9 Números de Renard

O engenheiro francês Charles Renard criou séries de números que ficaram conhecidas como números de Renard.

As séries são números no intervalo entre 1 e 10, espaçados igualmente na escala logarítmica de base 10.

Assim, ele criou séries com  $R = 5, 10, 20$  e  $40$  números.

Os números são determinados pela fórmula:

$$n(k+1) = n(k) \cdot 10^{\frac{1}{R}}$$

[5.31]



Onde "R" é a quantidade de números da série (5, 10, 20 ou 40), "k" é a posição do número na série e varia de 1 até "R". O resultado é arredondado para duas casas decimais.

Observe a semelhança entre as equações 5.30 e 5.31.

Por exemplo, o terceiro número da série de 5 números é:

$$n(3) = n(2) \cdot 10^{\frac{1}{5}} = n(1) \cdot 10^{\frac{1}{5}} 10^{\frac{1}{5}} = 1 \cdot 10^{\frac{2}{5}} = 2,5228... \cong 2,50$$

Em áudio, as séries de Renard são adotadas para identificar as frequências dentro da faixa de áudio, nos equalizadores.

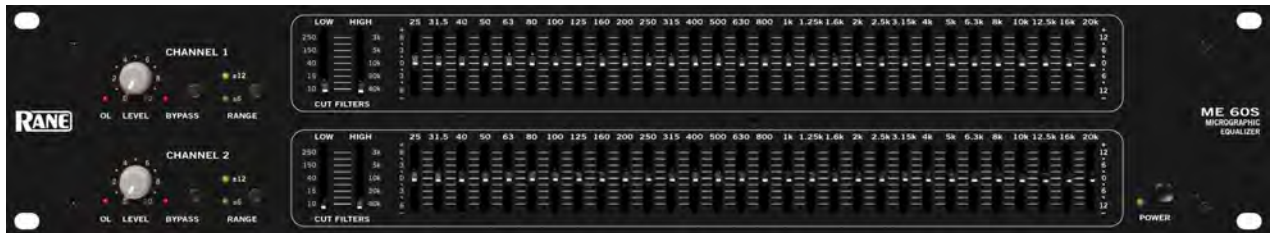


Fig. 5.11: Equalizador Rane ME-60S

A figura 5.11 mostra o equalizador gráfico da Rane, modelo ME-60S, que utiliza a série R10, com valores de frequência que vão de 25 Hz até 20 kHz.

A figura 5.12 mostra outro equalizador da Rane, modelo ME-15S, também para dois canais, porém com apenas 5 frequências por década (utiliza a série R5).



Fig. 5.12: Equalizador Rane ME-15S

## R5

|      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| 1.00 | 1.60 | 2.50 | 4.00 | 6.30 |
|------|------|------|------|------|

## R10

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1.00 | 1.25 | 1.60 | 2.00 | 2.50 | 3.15 | 4.00 | 5.00 | 6.30 | 8.00 |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|

## R20

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1.00 | 1.25 | 1.60 | 2.00 | 2.50 | 3.15 | 4.00 | 5.00 | 6.30 | 8.00 |
| 1.06 | 1.32 | 1.70 | 2.12 | 2.65 | 3.35 | 4.25 | 5.30 | 6.70 | 8.50 |
| 1.12 | 1.40 | 1.80 | 2.24 | 2.80 | 3.55 | 4.50 | 5.60 | 7.10 | 9.00 |
| 1.18 | 1.50 | 1.90 | 2.36 | 3.00 | 3.75 | 4.75 | 6.00 | 7.50 | 9.50 |

## 5.10 Ruídos de teste

### 5.10.1 Ruído Branco

Sinal aleatório cujo nível médio (RMS) é constante e a energia é distribuída igualmente em todo o espectro de frequência.

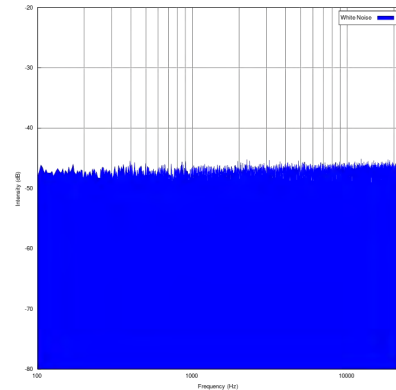


Fig. 5.13: Ruído branco

### 5.10.2 Ruído Rosa

Sinal aleatório cujo nível médio cai 10 dB/década (3 dB/oitava) e a energia cai logarithmicamente (linearmente no gráfico logarítimo) em todo o espectro de frequência. Este tipo de ruído tem comportamento semelhante ao ouvido humano, em relação à sensibilidade em função da frequência.

Normalmente possui um fator de pico (crest factor) de 12 dB. O ruído rosa definido pela norma IEC possui fator de pico igual a 6 dB.

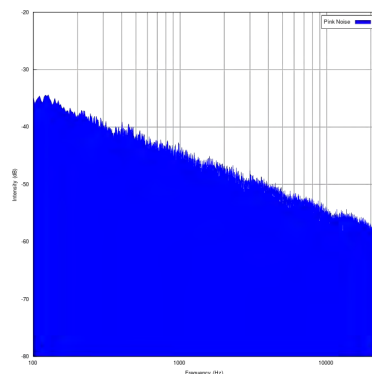
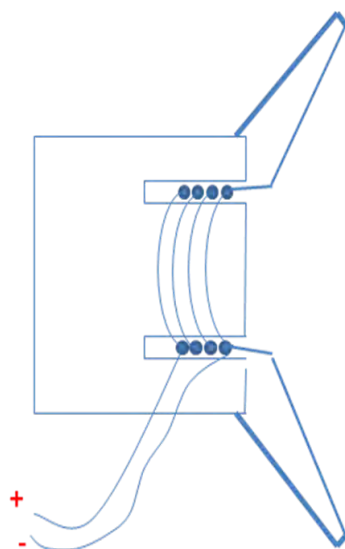


Fig. 5.14: Ruído rosa

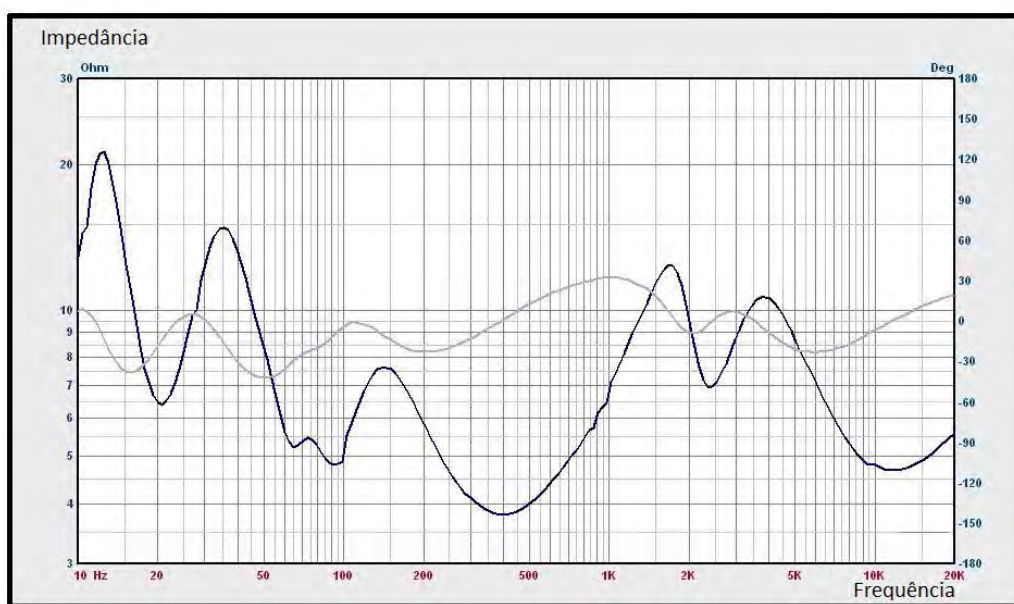
## 5.11 Impedância nominal do alto-falante

A impedância nominal é normalmente especificada pelos fabricantes como 4 ou 8 ohms. A impedância é um parâmetro complexo e varia com a frequência.

Segundo a norma IEC-60268-5, a impedância de um alto-falante, entre 20 Hz e 20 kHz, não deve ser menor que 80% do valor nominal. Por exemplo um alto-falante cujo fabricante afirma que possui 8  $\Omega$ , deve ter impedância igual ou superior a 6,4  $\Omega$  na faixa de teste.



**Fig. 5.15: Alto-falante**



**Fig. 5.16: Exemplo de curvas de impedância e fase de um sonofletor**

## 5.12 Teste do alto-falante

Teste da bateria de 9v

## 5.13 Faixa de frequência dos CDs e DVDs

Discussão em sala sobre a qualidade do CD versus a do vinyl.



### 5.13.1 Experiência

Vídeo compara a faixa de frequência do CD com a do vinyl.

Com uma interface de áudio Creative 0202-USB2, que apesar de ser capaz de amostrar o áudio em 192 kHz com 24 bits, o autor captura em 120 kHz, devido à limitação de seu computador, demonstrando no vídeo que o CD corta todo o conteúdo de áudio acima de 22 kHz, enquanto o LP vai reduzindo a amplitude suavemente até um pouco além dos 60 kHz.

Vimos que neste curso que o limite superior da audição humana foi convencionado ser 20 kHz. O autor do vídeo pergunta que diferença isso faz, já que não ouvimos o que o LP oferece a mais.



Fig. 5.17: Creative 0202-USB2

- Micro + acesso Internet
- Youtube, 7 minutos

<https://www.youtube.com/watch?v=4eC6L3 k 48>

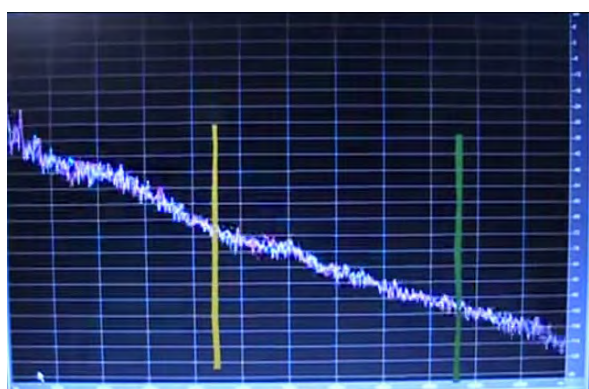


Fig. 5.18a: LP

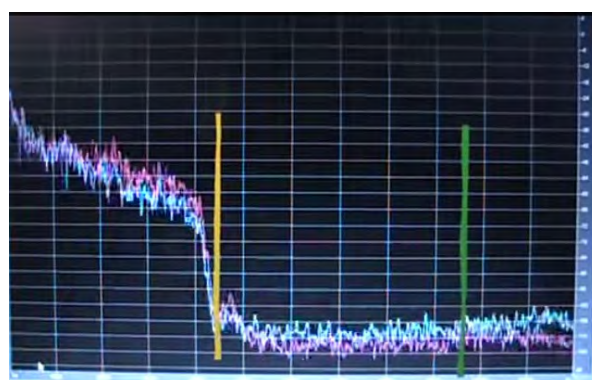


Fig. 5.18b: CD

O vídeo reproduz "Rhapsody in Blue", uma composição de George Gershwin de 1924, gravada em 1981 pela orquestra "Royal Philharmonic Orchestra".

A tela do analisador possui duas marcações: uma em 22 kHz (correspondente à amostragem do CD em 44.1 kHz) e em 48 kHz (corresponde a uma amostragem de 96 kHz).

Continuar a discussão em sala e colher opiniões. Levantar outros aspectos que podem influenciar na preferência entre um e outro: faixa dinâmica, ruído, como foi feita a gravação original, etc. Comentar sobre a rotação do disco de vinyl ( $33\frac{1}{3}$  e 45 RPM).